

BAC MATH PROBABILITE aux BAC de 2020 au 1986

Nouveau Régime

Exercice 01 : 2020 Contrôle - 5 points

On dispose d'une urne U_1 contenant deux boules noires et deux boules blanches et une urne U_2 contenant une boule noire et trois boules blanches.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On procède à l'expérience suivante : On tire au hasard une boule de U_1

* si blanche, on la remet dans l'urne U_1 et on tire simultanément 2 boules de U_2

* si noire, on la remet dans l'urne U_2 et on tire simultanément 2 boules de U_2 .

On considère les événements suivants :

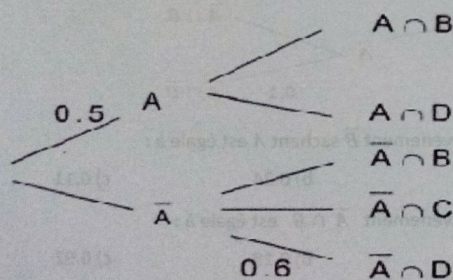
A : " La boule tirée de U_1 est blanche."

B : " On tire deux boules blanches de U_2 "

C : " On tire deux noires de U_2 "

D : " On tire deux boules de couleurs différentes de l'urne U_2 ."

1) a) Recopier et compléter l'arbre de choix suivant :



b) Déterminer $p(B)$ et $p(D)$

c) Montrer que la probabilité qu'il ne reste aucune boule noire dans U_2 est $\frac{3}{10}$

2) Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules noires restantes dans l'urne U_2

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Quelle est la probabilité qu'il reste au moins une boule noire dans U_2

3) On répète n fois de suite ($n > 1$) et de manière indépendante l'expérience aléatoire précédente. On désigne par F_n l'évènement : "il ne reste dans l'urne U_2 aucune boule noire pour les $(n - 1)$ premières épreuves et il reste au moins une boule noire à la $n^{\text{ème}}$ épreuve".

Quelle est la probabilité p_n de F_n ?

Exercice 02 : 2019 Contrôle - 3 points

Une entreprise fabrique des pièces électroniques pour une marque de voitures.

Une étude statistique a prouvé que 6% des pièces fabriquées sont défectueuses.

L'unité de contrôle rejette 97% des pièces défectueuses et 2% des pièces non défectueuses.

On choisit une pièce au hasard et on la soumet à un test de contrôle.

On note D : "la pièce est défectueuse"

et R : "la pièce est rejetée par l'unité de contrôle"

1) Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilité.

2) a) Calculer la probabilité que la pièce soit défectueuse et ne soit pas rejetée par l'unité de contrôle

b) On dit qu'il y a erreur de contrôle lorsque une pièce défectueuse est acceptée ou une pièce non défectueuse est rejetée. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de contrôle

3) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit acceptée est égale à 0.923

- 4) Pour la commercialisation de ses pièces, l'entreprise décide de faire passer chaque pièce à trois contrôles successifs mais indépendants :
- * Si la pièce est acceptée par les trois contrôles, elle sera commercialisée avec le logo de la marque de voiture.
 - * Si la pièce est acceptée par deux contrôles, elle sera commercialisée sans le logo de la marque de voiture.
 - * Si la pièce est acceptée par un seul contrôle ou rejetée, elle sera détruite.
- a) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit commercialisée sans le logo de la marque de voiture est $3 \times (0,923)^2 \times (0,077)$
- b) Déterminer la probabilité pour que la pièce soit détruite.

Exercice 03 : 2018 Contrôle - 3 points

Une urne contient six pièces de monnaie :

- * quatre pièces sont équilibrées
- * les deux autres pièces sont truquées de façon que la probabilité d'obtenir "FACE" est égale à $\frac{2}{3}$.

On tire une pièce de l'urne et on effectue n lancers successifs de cette pièce $n \geq 1$.

On considère les événements : * E : « la pièce tirée est équilibrée »

* F_n : « on obtient FACE pour les n lancers »

- a) Déterminer $p(E)$, $p(F_1/E)$ et $p(F_1/\bar{E})$
- b) Montrer que $p(F_1) = \frac{5}{9}$
- Montrer que $p(F_n) = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$
- Soit X_n la variable aléatoire définie par :
$$\begin{cases} X_n = n & \text{si } F_n \text{ est réalisé} \\ X_n = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
 - Donner la loi de probabilité de X_n
 - Déterminer l'espérance mathématique de X_n

c) Dans la figure ci-jointe :

* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé

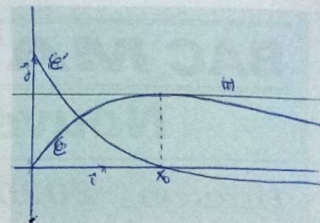
* (C) la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x}{3} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} + \left(\frac{2}{3} \right)^x \right)$

* (C') la courbe de la fonction dérivée f'

* la courbe (C') coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse x_0

* (T) est la droite d'équation $y = f(x_0)$

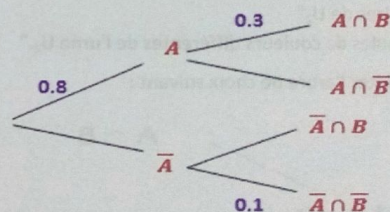
Exploiter le graphique pour déterminer l'entier n pour lequel l'espérance mathématique $E(X_n)$ soit maximale.



Exercice 04 : 2017 Contrôle - 3 points

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée

On représente ci-contre, une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité



- La probabilité de l'évènement $\bar{B}$ sachant A est égale à :
 - 0.7
 - 0.24
 - 0.11
- La probabilité de l'évènement $\bar{A} \cap B$ est égale à :
 - 0.11
 - 0.18
 - 0.92
- La probabilité de l'évènement A sachant B est égale à :
 - $\frac{3}{7}$
 - $\frac{5}{7}$
 - $\frac{4}{7}$

Exercice 05 : 2012 Principale - 3 points

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle.

La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.125$

Dans l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut

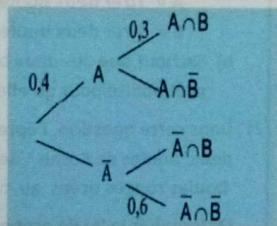
- 1) a) Montrer que $p(X > 10) = 0.286$
b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois
- 2) Le responsable du laboratoire veut commander $n \geq 2$ oscilloscopes. La durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.
 p_1 : la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une vie supérieure à 10 ans
a) Exprimer p_1 en fonction de n
b) Combien d'oscilloscopes devrait commander le responsable pour que $p_1 \geq 0.999$

Exercice 06 : 2012 Contrôle - 3 points:

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :

Répondre par "Vrai" ou "Faux" en justifiant

- 1) $p(\bar{A}) = 0.6$
- 2) La probabilité de $\bar{B}$ sachant A est égale à 0.7
- 3) $p(B) = 0.7$
- 4) $p(A \cup B) = 0.64$



Exercice 07 : 2009 Principale - (QCM) - 0.75 point

Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte 4 questions.

Pour chaque question 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte.

La probabilité pour que ses 4 réponses soient exactes est :

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3^4}$ c) $1 - (\frac{2}{3})^4$

Exercice 08 : 2008 Principale - (QCM) 1 pt

La durée de vie, en année, d'une machine suit une loi exponentielle de paramètre 0,4

La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans

est égale à : a) e^{-4} b) $1 - 0.4 e^{-4}$ c) $1 - e^{-4}$

Ancien Régime

Exercice 09 : 2008 Contrôle (4 points)

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

- 1) On tire simultanément 3 boules et on désigne par X l'aléa numérique qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) L'urne contient toujours 4 boules rouges et 2 boules blanches. On considère maintenant l'épreuve E suivante : On tire une première boule, puis, sans la remettre dans l'urne, on tire simultanément 2 boules. On considère l'événement

A : "obtenir deux boules rouges et une boule blanche à la fin des deux tirages"

- a) Montrer que $p(A) = \frac{3}{5}$
- b) On répète n fois de suite l'épreuve E en remettant les boules tirées dans l'urne. Calculer la probabilité p de l'événement "A est réalisé au moins une fois"
- c) Déterminer n pour que l'on ait $p \geq 0.99$.

Exercice 10 : 2007 Contrôle (4 points)

Une urne contient 4 dèss indiscernables au toucher.

* 3 dèss sont verts et leurs faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6

* 1 dé est rouge et ses faces sont numérotées 2, 2, 4, 4, 6, 6

- 1) On tire au hasard un dé. Calculer les probabilités des événements suivants :
 A « le dé tiré est rouge » et B « le dé tiré est vert »
- 2) Une épreuve consiste à tirer un dé puis le lancer trois fois.
Soit l'événement C : « Obtenir 3 fois de suite un numéro pair »
Montrer que $p(C|A) = 1$ et $p(C|B) = \frac{1}{8}$. En déduire $p(C)$.
- 3) Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'on a obtenu une face dont le numéro est pair.
Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer $E(X)$ et $V(X)$

Exercice 11 : 2006 Contrôle (5 points)

On dispose de deux urnes indiscernables U_1 et U_2 .

U_1 contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.

U_2 contient 3 jetons noirs et deux jetons blancs.

- 1) Une 1^{ère} épreuve consiste à tirer 1 jeton de U_1 et 1 j de U_2 .

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir deux jetons noirs »

B : « obtenir deux jetons de même couleur »

C : « obtenir un jeton blanc et un seul »

- 2) Une 2^{ème} épreuve consiste à choisir une urne et à tirer un jeton de cette urne.

a) Montrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est $\frac{1}{2}$

b) Calculer la probabilité de tirer un jeton blanc de U_1 sachant qu'il est blanc.

- 3) On répète la deuxième épreuve n fois de suite ($n \geq 2$), en remettant à chaque fois le jeton tiré dans son urne d'origine.

Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de fois où on a tiré un jeton blanc.

a) Donner la loi de probabilité de X .

b) Calculer son espérance et sa variance.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la probabilité de tirer deux fois un jeton blanc est supérieure ou égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 12 : 2005 Contrôle (5 points)

Une urne contient trois boules rouges numérotées : 1, 2, 2 et trois boules blanches numérotées : 1, 1, 2.

Une épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.

- 1) a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « avoir trois boules de même couleur »

B : « la somme des nombres inscrits sur les boules tirées est égale à cinq »

b) Soit l'événement C : « avoir au moins une boule rouge qui porte le numéro 2 »

Montrer que $p(C) = \frac{4}{5}$

- 2) Soit X l'aléa numérique qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges obtenues portant le numéro 2.

Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer $E(X)$.

- 3) On répète l'épreuve précédente n fois ($n \geq 1$) de suite, en remettant après chaque épreuve les boules tirées dans l'urne.

a) Calculer la probabilité p_n pour que "C" soit réalisé au moins une fois.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,99$

Exercice 13 : 2004 Contrôle (4 points)

Une urne contient deux boules blanches numérotées 1 et 2 et trois boules rouges numérotées : 1, 2, 2.

- 1) On tire simultanément deux boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité des événements suivants :

A « Tirer deux boules de couleurs différentes »

B « Tirer deux boules de même numéro »

b) Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, calculer la probabilité pour qu'elles portent le même numéro.

- 2) Dans cette question, l'épreuve consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne. Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de boules rouges tirées au cours de l'épreuve.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$

Exercice 14 : 2003 Contrôle (5 points)

Une urne U_1 contient 4 boules blanches et 2 boules noires

et une urne U_2 contient 3 boules blanches et 3 boules noires

Une épreuve consiste à tirer une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis tirer une boule de U_2 que l'on met dans U_1 .

Soient : A, B et C les événements suivants :

A « La boule tirée de U_1 est noire et la boule tirée de U_2 est blanche »

B « La boule tirée de U_1 est noire et la boule tirée de U_2 est noire »

C « à l'issue de cette épreuve les deux urnes U_1 et U_2 se retrouvent chacune avec la configuration de départ, c-à-d que l'urne U_1 contient 4 blanches et 2 noires et l'urne U_2 contient 3 blanches et 3 noires »

- 1) a) Calculer $p(A)$ et $p(B)$
b) Montrer que $p(C) = \frac{4}{7}$
- 2) On répète l'épreuve précédente 4 fois et on désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeurs :
 $X = 0$: si l'événement "C" n'est pas réalisé au cours des quatre épreuves
 $X = k$: si "C" est réalisé pour la première fois à la $k^{\text{ème}}$ épreuve
a) Déterminer la loi de probabilité de X
b) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 15 : 2002 Principale (4 points)

Une urne contient une boule blanche, une boule rouge et trois boules noires

- 1) On tire une boule, calculer la probabilité p_1 pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs.
- 2) On tire successivement et sans remise deux boules
Calculer la probabilité p_2 pour qu'il reste dans l'urne exactement 2 couleurs.
- 3) On tire simultanément deux boules de l'urne.
On désigne par X : l'aléa qui prend pour valeur le nombre de couleurs qui restent dans l'urne.
a) Déterminer la loi de probabilité de X
b) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 16 : 2001 Contrôle (4 points)

Une urne contient quatre boules rouges et six boules noires.

- 1) On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité de l'événement : « la première boule tirée est noire et les deux autres tirées sont rouges »

- 2) On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de l'événement : « la première boule tirée est noire et les deux autres tirées sont rouges »

- 3) Soit E l'épreuve qui consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.

Soit l'événement : A « Obtenir une boule noire et deux boules rouges »

- a) Montrer que la probabilité de A est égale à 0,3
- b) On répète l'épreuve E , 5 fois en remettant les trois boules tirées dans l'urne après chaque épreuve et on désigne par X : l'aléa qui prend pour valeur le nombre de fois où A est réalisé.
Déterminer la loi de probabilité de X
- c) Calculer la probabilité de l'événement : " $1 < X \leq 3$ "

Exercice 17 : 2000 Principale (5 points)

Un sac contient 2 boîtes B_1 et B_2 indiscernables aux touchers.

La boîte B_1 contient deux boules rouges et une boule noire.

La boîte B_2 contient deux boules rouges et deux boules noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer du sac, au hasard, l'une des deux boîtes puis tirer et simultanément, deux boules de cette boîte.

Soit les événements : A : « Obtenir 2 boules de même couleur »
et E : « Les deux boules tirées sont de B_1 ».

- 1) a) Montrer que la probabilité de l'événement A est $\frac{1}{3}$.
b) Sachant que les deux boules tirées sont de même couleur, quelle est la probabilité pour qu'elles soient tirées de B_1 ?
- 2) On répète l'épreuve n fois, ($n \geq 2$), en remettant à chaque fois, les deux boules tirées dans leur boîte et la boîte dans le sac.
Soit X : l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de fois où on obtient deux boules de même couleur.

- a) Soit $k \leq n$. Calculer $p(X = k)$
- b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X
- c) On désigne par p_n la probabilité d'obtenir, au bout de n tirages, au moins une fois deux boules de même couleur.
Calculer p_n en fonction de n . et déterminer la limite de p_n .

Exercice 18 : 1998 Contrôle (4 points)

- 1) a) On lance un dé truqué dont les faces numérotées de 1 à 6.
Sachant que la probabilité d'apparition du n° 6 est $\frac{1}{3}$ et que les autres numéros ont la même probabilité d'apparition, calculer la probabilité d'apparition pour les numéros de 1 à 5.
b) On lance aussi une pièce de monnaie truquée.
Sachant que la probabilité d'apparition de "Pile" est $\frac{2}{5}$
Calculer la probabilité de l'autre face.
- 2) On lance simultanément le dé et la pièce de monnaie et on désigne par X l'aléa numérique définie comme suit:
* Si la face "Pile" apparaît en même temps qu'un numéro impair alors $X = 0$
* Si la face "Pile" apparaît en même temps qu'un numéro pair alors $X = 1$
* Si la face "Face" apparaît alors X prend pour valeur le numéro du dé.
Déterminer la loi de probabilité de X
- 3) On répète l'épreuve précédente trois fois de suite et on désigne par Y le nombre de fois où l'on obtient " $X \geq 5$ "
a) Calculer $P(Y = 2)$
b) Calculer l'espérance mathématique de Y et sa variance

Exercice 19 : 1997 Contrôle (5 points)

On considère une pièce de monnaie truquée de sorte que la probabilité d'avoir "Face" soit égale à $\frac{2}{5}$

- 1) On lance la pièce de monnaie deux fois de suite
 - a) Calculer la probabilité d'avoir deux fois "Pile"
 - b) Calculer la probabilité d'avoir deux fois "Face"
 - c) Calculer la probabilité d'avoir exactement une fois "Pile"

- 2) On considère trois urnes : U_1 ; U_2 et U_3

U_1 contient 4 boules blanches et 2 boules noires

U_2 contient 3 boules blanches et 3 boules noires

U_3 contient 2 boules blanches et 4 boules noires

Soit l'épreuve (E) suivante : On lance la pièce de monnaie 2 fois de suite.

Si on obtient : * deux fois "Pile" on tire simultanément 3 boules de U_1 .

* "Pile et Face" on tire simultanément 3 boules de U_2 .

* deux fois "Face" on tire simultanément 3 boules de U_3

- a) Soit A « les 3 boules obtenues sont blanches »

Calculer la probabilité de l'événement A

- b) On répète l'épreuve (E) cinq fois de suite et on désigne par X l'aléa numérique prenant pour valeurs le nombre d'épreuves donnant trois boules blanches.

Calculer la probabilité de « $X = 2$ » puis calculer $E(X)$.

Exercice 20 : 1996 Principale (4 points)

Une urne contient 4 boules indiscernables au toucher : 2 boules sont blanches portent les nombres 1 et 2, les 2 autres sont noires et portent les nombres 1 et 2.

Une épreuve consiste à tirer successivement, deux boules de la manière suivante :

On tire une première boule :

* si elle est blanche, on la remet et on tire une 2^{ème} boule

* si elle est noire, on ne la remet pas et on tire une 2^{ème}.

- 1) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le nombre de fois où l'on obtient une boule blanche.

- a) Donner la loi de probabilité de X

- b) Calculer son espérance mathématique.

- 2) Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le produit des nombres marqués sur les 2 boules obtenues.

Donner la loi de probabilité de Y .

Exercice 21: 1995 Principale (5 points)

On dispose de deux dés en apparences identiques dont l'un est parfait et l'autre truqué. Les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.

Avec le dé truqué, la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

- 1) a) On lance le dé parfait 3 fois de suite et on désigne par X : la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face portant le "4" apparaît. Quelle est la loi de probabilité de X ?
b) On lance 3 fois de suite le dé truqué. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face portant le "4" ?
- 2) On choisit au hasard un dé, les choix étant équiprobables, et on le lance 3 fois. On considère les événements :

A : "Obtenir exactement deux fois la face 4"

B : "Choisir le dé truqué et obtenir exactement 2 fois la face 4"

C : "Choisir le dé parfait et obtenir exactement 2 fois la face 4"

- a) Calculer les probabilités des événements B et C
- b) En déduire la probabilité de l'événement A

Exercice 22: 1994 Principale (4 points)

Une urne contient : cinq boules blanches, deux boules rouges et trois boules vertes. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

- 1) On tire simultanément trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité des événements suivants :
 A : Obtenir trois boules de même couleur
 B : Obtenir au moins une boule rouge
- 2) On effectue maintenant un tirage successif de deux boules comme suit :
Si elle est blanche, on la remet et on effectue le 2^{ème} tirage.
Si non, on la garde à l'extérieur et on effectue le 2^{ème} tirage.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout résultat associé, le nombre de boules rouges. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$.

Exercice 23: 1993 Contrôle (4 points)

Une urne contient douze boules dont n sont noires et les autres sont blanches.

- 1) On suppose que $n = 5$ et on tire, successivement et sans remise deux boules
a) Calculer la probabilité des événements suivants:
 A : "La 1^{ère} boule est noire et la 2^{ème} est blanche"
 B : "Les deux boules tirées sont blanches"
b) On répète l'épreuve six fois de suite en remettant, à l'issue de chaque épreuve, les deux boules tirées dans l'urne.
On considère l'aléa X prenant pour valeur le nombre de réalisation de " A ". Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que $E(X)$
- 2) Dans cette question, on suppose que $n \geq 2$
a) Exprimer, en fonction de n , la probabilité p_n de l'événement " A "
b) Déterminer n pour que p_n soit maximale.

Exercice 24: 1992 Contrôle (4 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et d'une pièce de monnaie.

L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules rouges.

L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules rouges.

La pièce de monnaie est truquée de façon que, la probabilité d'obtenir "Face" soit le double de celle d'obtenir "Pile".

- 1) Calculer les probabilités d'obtenir "Face" puis "Pile".
- 2) On considère l'épreuve suivante : On lance la pièce de monnaie :
* Si "Face" alors on tire simultanément deux boules de U_1
* Si "Pile" alors on tire simultanément trois boules de U_2
a) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule blanche ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une blanche ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches ?
- 3) On répète l'épreuve précédente 4 fois en remettant à chaque fois les boules tirées dans leurs urnes respectives. Soit X l'aléa numérique, qui prend pour valeurs, le nombre d'épreuve donnant 3 boules blanches.
a) Calculer la probabilité de l'événement " $X = 1$ "
b) Calculer l'espérance mathématique de X

Exercice 25: 1991 Principale (4 points)

Un sac contient sept jetons indiscernables au toucher, répartis comme suit :
4 jetons blancs numérotés : 1, 2, 2, 2 et 3 jetons noirs numérotés : 1, 1, 2.

- 1) On tire successivement et avec remise 3 jetons du sac.
 - a) Calculer la probabilité d'avoir trois jetons blancs
 - b) Calculer la probabilité pour que parmi les 3 jetons tirés il y en ait deux seulement qui portent le numéro 1.
- 2) On tire de nouveau successivement trois jetons de la manière suivante :
 - * Si le jeton tiré porte le n° 2, il est remis dans le sac.
 - * Si le jeton tiré porte le n° 1, il n'est pas remis dans le sac
 - a) Calculer la probabilité d'avoir trois jetons blancs
 - b) Calculer la probabilité pour que deux seulement des trois jetons tirés portent le numéro 1.

Régime Antérieur

Exercice 26: 1991 Contrôle (5 points)

Un sac contient quatre boules blanches numérotées de 1 à 4 ; et quatre boules rouges numérotées de 1 à 4. Toutes ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément et au hasard deux boules du sac.

- 1) Calculer la probabilité des événements suivantes:
 - A : Les deux boules tirées portent le même numéro
 - B : Chacune des boules tirées porte un numéro pair
 - C : Une des deux boules tirées porte le numéro 2
- 2) On répète l'épreuve précédente n fois (avec $n \geq 2$) en remettant après chaque tirage les boules tirées.
 - a) Déterminer la probabilité p pour que chacun des n tirages donne deux boules de même couleur.
 - b) Déterminer la probabilité q pour que, parmi les n tirages, il y en ait au moins un où les boules sont de couleurs différentes
 - c) Déterminer n pour que l'on ait : $q > 0,99$.

Exercice 27: 1990 Contrôle (5 points)

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Ce dé est truqué de façon qu'à chaque jet, la probabilité d'obtenir pair soit égale au double de celle d'obtenir impair.

- 1) On lance le dé une fois et on désigne par p la probabilité d'obtenir un nombre impair.
 - a) Calculer p
 - b) Déduire la probabilité d'obtenir le nombre 1 puis celle d'obtenir le nbre 2.
- 2) On lance le dé 3 fois. Calculer les probabilités suivantes :
 - a) Obtenir exactement deux fois le numéro 2
 - b) Obtenir au moins deux fois le numéro 2

Exercice 28: 1986 – Contrôle (5 points)

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

- 1) On tire simultanément deux boules de l'urne.

Quelle est la probabilité pour que les 2 boules tirées soient blanches ?
- 2) On tire 1 boule de l'urne, on la remet et on tire de nouveau une boule.

Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne une fois et une seule une boule blanche ?
- 3) On effectue n tirages successifs numérotés : 1 ; 2 ; 3 ; ... ; n en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire définie par :

 - * $X = 0$ si l'on ne tire aucune boule blanche et
 - * X prenant le numéro du premier tirage ayant fourni une boule blanche.
 - a) Calculer la probabilité p_0 de l'événement " $X = 0$ "
 - b) Calculer la probabilité p_k de l'événement " $X = k$ "
 - c) Calculer $p_n = \sum p_k$ puis la limite de p_n

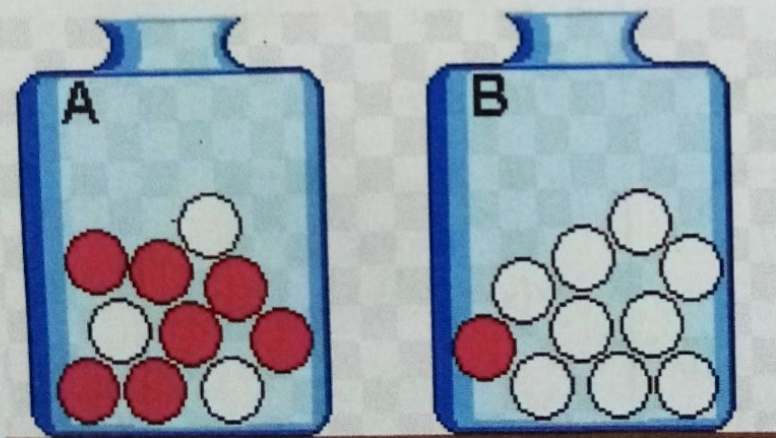
Section : **MATHEMATIQUES**

Correction de la série

Probabilité

aux BAC

entre 1986 et 2020

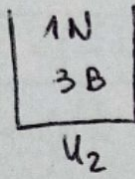
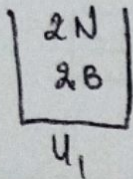


Etablie par : **Mr M. MAAOUIA**

98 600 618 - 20 810 290

e-mail : moez-maaouia@hotmail.com

Exercice N° 01: Contrôle 2020



on tire 1 boule de U_1 :

• si B $\rightarrow$ on tire simult 2 boules de U_2

• si N $\rightarrow$ on la remet dans U_2 et on tire simult 2 boules de U_2

A: obtenir 1 blanche de U_1

B: Tirer 2B de U_2

C: tirer 2N de U_2

D: obtenir 2 boules couleurs différents de U_2

1) a) $B|A$: obten 2B de U_2

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$D|A$: obten 1B et 1N de U_2

$$\Rightarrow P(D|A) = \frac{C_3^1 \cdot C_1^1}{C_4^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$B|\bar{A}$: obtenir 2B de U_2 qui contiennent

$$\Rightarrow P(B|\bar{A}) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

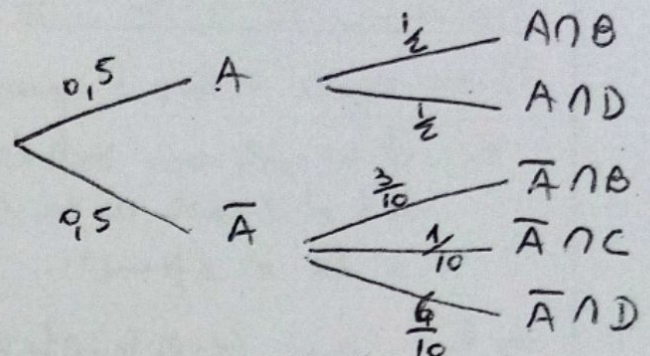
$C|\bar{A}$: obten 2N de U_2

$$\Rightarrow P(C|\bar{A}) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

$D|\bar{A}$: obten 1B et 1N de U_2

$$\Rightarrow P(D|\bar{A}) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$$

d'au l'autre de choix st,



$$b) B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

car $(A \cap B)$ et $(\bar{A} \cap B)$: incompatibles

$$\text{d'où } P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

$$\Rightarrow P(B) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{3}{10}\right) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$D = (A \cap D) \cup (\bar{A} \cap D)$$

$$\Rightarrow P(D) = P(A \cap D) + P(\bar{A} \cap D)$$

car $(A \cap D)$ et $(\bar{A} \cap D)$: incompatibles

$$\Rightarrow P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(\bar{A}) \cdot P(D|\bar{A})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{7}{10}$$

c) Soit l'événement S: il ne reste aucune boule N dans U_2

$$\Rightarrow S = (\bar{A} \cap C) \cup (A \cap D)$$

$$\Rightarrow P(S) = P(\bar{A}) \cdot P(C|\bar{A}) + P(A) \cdot P(D|A)$$

$$\Rightarrow P(S) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

2) X: le Nbre de boules Noires restants

$$\Rightarrow X(\omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=0) = P(S) = \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap D) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(D|\bar{A}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

d'où la loi de probabilité de X

$X = X_i$	0	1	2	Σ
$P(X = X_i)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{3}{20}$	1

3) on répète n fois l'épreuve

F_n : il ne reste aucun boub les $(n-1)^{e}$ fois et il reste au moins 1 Noix à la n^e épreuve.

$\Rightarrow F_n$: aussi $(X=0): (n-1)^{e}$ fois
pour $X > 0$

$$\Rightarrow P_n = [P(X=0)]^{n-1} \cdot P(X>0)$$

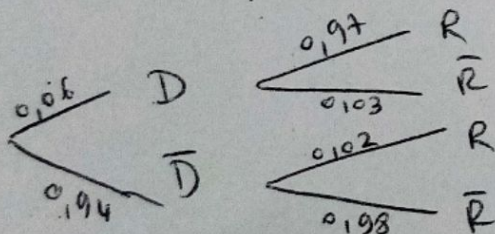
$$\Rightarrow P_n = \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \left(\frac{7}{10}\right)$$

Exercice 02 : 2019 Contrôle

D: La pièce est défectueuse

R: la pièce est rejetée

1) L'arbre de probabilité est:



$$2) a) P(D \cap \bar{R}) = P(D) \cdot P(\bar{R}|D) \\ = (0.06)(0.03) = 0.0018$$

b) soit E : il y a erreur

$$\Rightarrow E = (D \cap \bar{R}) \cup (\bar{D} \cap R)$$

$$\Rightarrow P(E) = P(D \cap \bar{R}) + P(\bar{D} \cap R) \\ = (0.06)(0.03) + (0.94)(0.02)$$

$$P(E) = 0.0206$$

$$3) \bar{R} = (D \cap \bar{R}) \cup (\bar{D} \cap \bar{R})$$

$$\Rightarrow P(\bar{R}) = P(D \cap \bar{R}) + P(\bar{D} \cap \bar{R})$$

car $(D \cap \bar{R})$ et $(\bar{D} \cap \bar{R})$: incompatibles

$$\text{d'où } P(\bar{R}) = P(D) \cdot P(\bar{R}|D) + P(\bar{D}) \cdot P(\bar{R}|\bar{D}) \\ = (0.06)(0.03) + (0.94)(0.98)$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{R}) = 0.923$$

4) a) soit l'événement:

A: la pièce est commercialisée sans le logo

$\Rightarrow A$: la pièce est acceptée par 2 contrôles et rejetée par un contrôle

$$\Rightarrow P(A) = C_3^1 \times P(R) \cdot [P(\bar{R})]^2$$

$$\text{d'où } P(A) = 3 \times (0.077)(0.923)^2$$

b) soit l'événement: B: la pièce est défective

$\Rightarrow B$: la pièce est rejetée par 2 contrôles ou rejetée par 3 contrôles

$$\Rightarrow P(B) = C_3^2 [P(R)]^2 \cdot P(\bar{R}) + [P(R)]^3$$

$$\Rightarrow P(B) = 3(0.077)^2(0.923) + (0.077)^3$$

$$\Rightarrow P(B) = (0.077)^2 (2.846)$$

Exercice 03 : 2018 Contrôle

4 pièces équilibrées

2 pièces truquées / $P(F) = \frac{2}{3}$

on tire une pièce et on la lance n fois

E : la pièce est équilibrée

F_n : on obtient F pour les n lancers

$$1) a) P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$F_n | E$: obtenir F sachant pièce équilibrée

$$\Rightarrow P(F_n | E) = \frac{1}{2}$$

• $F_1 | \bar{E}$: obtenir F sachant triquée
 $\Rightarrow P(F_1 | \bar{E}) = \frac{2}{3}$

b) $F_1 = (F_1 \cap E) \cup (F_1 \cap \bar{E})$
 $\Rightarrow P(F_1) = P(E) \cdot P(F_1 | E) + P(\bar{E}) \cdot P(F_1 | \bar{E})$
 $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$

2) F_n : obtenir n face $\leftarrow$ équilibrée ou triquée

$\Rightarrow F_n = (F_n \cap E) \cup (F_n \cap \bar{E})$
 $\Rightarrow P(F_n) = P(E) \cdot P(F_n | E) + P(\bar{E}) \cdot P(F_n | \bar{E})$
 $= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$
 $\Rightarrow \boxed{P(F_n) = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]}$

3) $X_n = n$ si F_n réalise
 $X_n = 0$ si non

a) $X(n) = \{0, n\}$
 $P(X=n) = P(F_n) = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$

$P(X=0) = 1 - P(F_n)$

d'où la loi de proba de X est

$x = x_i$	0	n
$P(X=x_i)$	$1 - P(F_n)$	$P(F_n)$

b) $E(X) = \sum x_i \cdot p(x=x_i) = n \cdot P(F_n)$

$\Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{n}{3} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]}$

c) $f(x) = \frac{x}{3} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^x \right]$

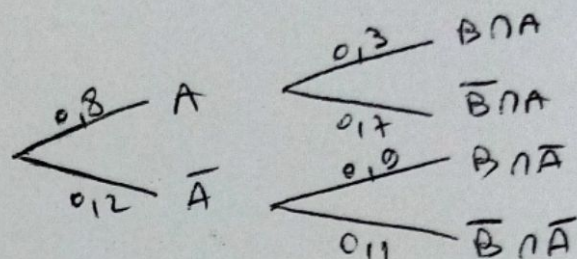
$E(X_n) = f(n)$

ou $f'(x)$: s'annule en x_0 et change de signe de $\oplus \rightarrow \ominus \Rightarrow$

$f(n)$ est maximale lorsque $n = x_0$
 or $x_0 \in]1, 2[\Rightarrow \boxed{n=2}$
 et $n \in \mathbb{N}^*$

Concl: si $n=2 \Rightarrow E(X_n)$: maximale

Exercice 04: 2017 Contrôle



1) $P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A) = 1 - 0.3 = 0.7$
 $\Rightarrow \boxed{a}$

2) $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A}) = 0.2 \cdot 0.9$
 $= 0.18 \Rightarrow \boxed{b}$

3) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}$
 $= \frac{0.8 \times 0.3}{(0.8)(0.3) + (0.2)(0.9)} = \frac{4}{7} \Rightarrow \boxed{c}$

Exercice 05: 2012 Principale

X: suit une loi Exponentielle / $\lambda = 0.125$

1) a) $P(X > 10) = e^{-10\lambda} = e^{-1.25} \approx 0.286$

b) la durée de vie X est inférieure à 6

$\Leftrightarrow 0 \leq X \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(X \in [0, \frac{1}{2}]) = \int_0^{\frac{1}{2}} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^{\frac{1}{2}}$
 $= 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}} \approx 0.06$

2) P_1 : au moins 4 oscilloscopes ont une durée de vie ≥ 10 ans

a) $\bar{P}_1$: Tous les oscilloscopes ont une durée inférieure à 10 ans

$\Rightarrow \bar{P}_1 = [P(X \leq 10)]^n = (0.714)^n$

$\Rightarrow P_1 = 1 - \bar{P}_1 = \boxed{1 - (0.714)^n}$

$$b) p_1 \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - (0,774)^n \geq 0,999$$

$$\Leftrightarrow (0,774)^n \leq 10^{-3}$$

$$\ln \uparrow \Rightarrow n \cdot \ln(0,774) \leq -3 \ln(10)$$

$$\text{or } \ln(0,774) < 0 \Rightarrow n \geq \frac{-3 \ln(10)}{\ln(0,774)} \approx 20,5$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 21}$$

Exercice 06 : 2012 Contrôle

$$1) P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Vrai}}$$

$$2) P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Vrai}}$$

$$3) B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

$$\Leftrightarrow P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

$$= (0,4)(0,3) + (0,6)(0,4)$$

$$\Rightarrow P(B) = 0,36 \neq 0,7 \Rightarrow \boxed{\text{Faux}}$$

$$4) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B|A)$$

$$= (0,4) + (0,36) - (0,4) \cdot (0,3) = 0,64$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Vrai}}$$

Exercice 07 : 2009 Principale

Soit E: la réponse est exacte

$$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{5}$$

S: "les 4 réponses sont exactes"

$$\Rightarrow P(S) = [P(E)]^4 = \frac{1}{5^4} \Rightarrow \boxed{b}$$

Exercice 08 : 2008 Principale

X: suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,4$

$$P(X \geq 10) = e^{-\lambda \times 10} = e^{-(0,4) \times 10}$$

$$= e^{-4} \Rightarrow \boxed{a}$$

Ancien Régime**Exercice 09 : 2008 Contrôle**

$$1) \begin{matrix} 4R \\ 2B \end{matrix} \xrightarrow{\text{simult}} 3 \text{ boules}$$

X: le Nbre de boules Rouges obtenus

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$$

pour $x=1 \rightarrow$ obtenir 1R et 2B

$$\Rightarrow P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_2^2}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

pour $x=2 \rightarrow$ obtenir 2R et 1B

$$\Rightarrow P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_2^1}{C_6^3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

pour $x=3 \rightarrow$ obtenir 3R

$$\Rightarrow P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

d'où la loi de proba de X est

$x = x_i$	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

2) L'épreuve (E):

on tire 1 boule puis on tire simultanément 2 autres boules.

A: obtenir 2R 1B

a) A: obtenir 1R puis 1R 1B
ou obtenir 1B puis 2R

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{6} \times \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} + \frac{2}{6} \times \frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{3}{5}$$

b) on répète l'épreuve (E), n fois
P: la proba que A soit réalisée au moins 1 fois

$\bar{P}$: la proba que A ne soit réalisée aucune fois $\Rightarrow \bar{P} = [P(\bar{A})]^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$\text{alors } \boxed{P = 1 - \bar{P} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

$$\begin{aligned}
 c) p &\geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n \geq 0,99 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 10^{-2} \text{ ou } \log \uparrow \\
 &\Rightarrow n \log\left(\frac{3}{5}\right) \leq -2 \Leftrightarrow n \geq \frac{-2}{\log\left(\frac{3}{5}\right)} \approx 9,015 \\
 &\text{ou } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \boxed{n = 10}
 \end{aligned}$$

Exercice 10: 2007 Contrôle

4 de $\begin{cases} \rightarrow 3 \text{ dés verts: } 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \rightarrow 1 \text{ dé rouge: } 2, 2, 4, 4, 6, 6 \end{cases}$

1) on tire 1 dé:

A: le dé tiré est Rouge $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$

B: le dé tiré est Vert $\Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$

2) on tire 1 dé puis on le lance 3 fois

C: obtenir 3 fois un n° Pair

a) C|A: obtenir 3 Pairs du dé Rouge
 $\Rightarrow P(C|A) = \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$

C|B: obtenir 3 Pairs du dé Vert
 $\Rightarrow P(C|B) = \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P(C) &= P(C \cap A) + P(C \cap B) \\
 &= P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{32}$$

3) X: le Nbre de fac "Pair" obtenus

a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

* $X=0$: choisir le dé vert et obtenir 3 "impair"

$$\Rightarrow P(X=0) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{3}{32}$$

* $X=1$: choisir le dé vert et obtenir 1 "P" et 2 "I"

$$\Rightarrow P(X=1) = \frac{3}{4} \times \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{3}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{9}{32}$$

* $X=2$: choisir le dé vert et obtenir 2 "P" et 1 "I"

$$\Rightarrow P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{3!}{1!2!} \left(\frac{3}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{9}{32}$$

* $X=3$: choisir le dé Rouge $\Rightarrow P(X=3) = P(A) = \frac{11}{32}$

d'où la loi de proba de X est:

$x = x_i$	0	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{11}{32}$	1
$(x_i)(P(x_i))$	0	$\frac{9}{32}$	$\frac{18}{32}$	$\frac{33}{32}$	$\frac{60}{32}$
$(x_i)^2 P(x_i)$	0	$\frac{9}{32}$	$\frac{36}{32}$	$\frac{99}{32}$	$\frac{144}{32}$

$$E(X) = \sum x_i P(X=x_i) = \frac{60}{32} = \frac{15}{8}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{72}{16} - \left(\frac{15}{8}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{V(X) = \frac{63}{64}}$$

Exercice 11: 2006 Contrôle

2 j N
3 j B

U_1

3 j N
2 j B

U_2

1) on tire 1 j de U_1 et 1 j de U_2

A: obtenir 2 j N $\Leftrightarrow$ N de U_1 et N de U_2

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

B: obtenir 2 j de même couleurs

$\Leftrightarrow$ B: obtenir N de U_1 et N de U_2 ou B de U_1 et B de U_2

$$\Rightarrow P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

C: obtenir 1 seul j B et 1 seul j N

$$\Rightarrow C = \bar{B} \Rightarrow P(C) = 1 - P(B) = \frac{13}{25}$$

2) on choisit une urne et on y tire 1 j

a) E: obtenir 1 j B $\begin{cases} \text{de } U_1 \\ \text{ou} \\ \text{de } U_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow E: \begin{cases} \text{choisir } U_1 \text{ et tirer 1 j B de } U_1 \\ \text{ou} \\ \text{choisir } U_2 \text{ et tirer 1 j B de } U_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{P(E) = \frac{1}{2}}$$

b) F: tirer 1 j de U_1 sachant Blanc

$$\Rightarrow F = U_1 | E \Rightarrow P(F) = \frac{P(E \cap U_1)}{P(E)}$$

$$\Rightarrow P(F) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

3) on répète l'épreuve n fois
 X : le Nbre de fois où $"E"$ est réalisée

on X : suit la loi binomiale car:
 - l'épreuve se répète n fois
 - chaque épreuve donne $\begin{cases} E \\ \bar{E} \end{cases}$
 - $p(E)$: reste constante

alors $X(\omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
 $\forall k \in X(\omega): p(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$

$$\Rightarrow p(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$b) E(X) = n \cdot p = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = n(p)(1-p) = \frac{n}{4}$$

$$c) p(X=2) = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

car $\frac{n(n-1)}{2} \geq 1$ d'où $p(X=2) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 12: 2005 Contrôle

3 R: 1-2-2 3 B: 1-1-2 Simult $\rightarrow$ 3 boules

a) A: obtenir 3 boules de même couleur
 $\Rightarrow p(A) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_6^3} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

B: avoir une somme égale à 5
 $\Rightarrow$ obtenir 2 boules $n=2$ et 1 boule $n=1$
 $\Rightarrow p(B) = \frac{C_3^2 \times C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20}$

b) C: avoir au moins 1 R $n \geq 2$

$\Rightarrow C$: avoir 1 R $n=2$ et 2 $\bar{R}_2$
 ou 2 R₂ et 1 $\bar{R}_2$

$$\Rightarrow p(C) = \frac{C_2^1 \times C_4^2 + C_2^2 \times C_4^1}{C_6^3} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

2) X : le Nbre de boules R₂ obtenues

a) $X(\omega) = \{0, 1, 2\}$

$$X=0 \rightarrow \text{obtenir 3 } \bar{R}_2 \Rightarrow p(X=0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$$

$$X=1 \rightarrow \text{obtenir 2 } \bar{R}_2 \text{ et 1 } R_2 \Rightarrow p(X=1) = \frac{C_4^2 \times C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$$

$$X=2 \rightarrow \text{obtenir 1 } \bar{R}_2 \text{ et 2 } R_2 \Rightarrow p(X=2) = \frac{C_4^1 \times C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}$$

d'ici la loi de Probab de X est:

$X = x_i$	0	1	2	Σ
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1
$x_i \cdot p(X=x_i)$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$$b) E(X) = \sum x_i p(X=x_i) = 1$$

3) on répète l'épreuve n fois
 a) P_n : la proba. qu'une $"E"$ soit réalisée au moins 1 fois

$$\bar{P}_n: "E" \text{ n'est réalisée aucune fois}$$

$$\Rightarrow \bar{P}_n = [P(\bar{E})]^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n = \boxed{P_n = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$b) P_n \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^n \leq 10^{-2} \Rightarrow n \log\left(\frac{1}{5}\right) \leq -2$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2}{\log 5} \approx 2,86 \Rightarrow \boxed{n=3}$$

Exercice 13: 2004 Contrôle

2 B: $n \leq 1, 2$
 3 R: $n \leq 1, 2, 2$

1) on tire simultanément 2 boules

a) A: tirer 2 boules de couleurs $\neq$

$\Rightarrow A$: obtenir 1 R et 1 B

$$\Rightarrow p(A) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

B: tirer 2 boules même numéro
 $\Rightarrow$ obtenir 2 boules $n=1$ ou 2 $n=2$

$$\Rightarrow p(B) = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_5^2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$b) p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

a) $B \cap A$: obtenir 2 boules de même couleur et de couleurs $\neq$

$\Rightarrow B \cap A$: obtenir B₁R₁ ou B₂R₂

$$\Rightarrow p(B \cap A) = \frac{C_1^1 C_1^1 + C_1^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

$$\text{alors } p(B|A) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{4}$$

2) on tire successivement sans remise 2 boules

X : Nbre de boules R obtenues

$X(\omega) = \{0, 1, 2\}$

• pour $x=0 \rightarrow$ obtenir 2 B $\Rightarrow$

$$p(x=0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

• pour $x=1 \rightarrow$ obtenir 1 B et 1 R

$$\Rightarrow p(x=1) = 2! \left[\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \right] = \frac{6}{10}$$

• pour $x=2 \rightarrow$ obtenir 2 R

$$\Rightarrow p(x=2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

d'où la loi de proba de X est :

$x = x_i$	0	1	2	Σ
$p(x=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1
$x_i p(x_i)$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{12}{10}$

$$E(X) = \sum x_i p(x=x_i) = \frac{6}{5}$$

Exercice 14: 2003 Contrôle

4 B	3 B
2 N	3 N

U_1

U_2

on tire 1 boule de $U_1 \rightarrow$ dans U_2
 puis on tire 1 boule de $U_2 \rightarrow$ dans U_1

A : obtenir N de U_1 et B de U_2

B : obtenir N de U_1 et N de U_2

C : " U_1 et U_2 reste avec la configuration de départ"

$$1) a) p(A) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

$$p(B) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$$

b) C : avoir N de U_1 et N de U_2
 ou B de U_1 et B de U_2

$$\Rightarrow p(C) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

2) on répète l'épreuve 4 fois

$x=0$ si "C" n'est réalisé aucune fois
 $x=k$ si "C" est réalisé pour la $k^{\text{ème}}$ fois au $k^{\text{ème}}$ épreuve

$$a) X(\omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

• pour $x=0$: avec $\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}$
 $\Rightarrow p(x=0) = [p(\bar{C})]^4 = \left(\frac{3}{7}\right)^4 = \frac{81}{2401}$

• pour $x=1$: avec C V V V

$$\Rightarrow p(x=1) = p(C) \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} = \frac{1372}{2401}$$

• pour $x=2$: avec $\bar{C}C\bar{C}\bar{C}$

$$\Rightarrow p(x=2) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{588}{2401}$$

• pour $x=3$: avec $\bar{C}\bar{C}C\bar{C}$

$$\Rightarrow p(x=3) = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right) \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{252}{2401}$$

• pour $x=4$: avec $\bar{C}\bar{C}C\bar{C}$

$$\Rightarrow p(x=4) = \left(\frac{3}{7}\right)^3 \left(\frac{4}{7}\right) = \frac{108}{2401}$$

d'où la loi de proba de X :

$x = x_i$	0	1	2	3	4	Σ
$p(x=x_i)$	$\frac{81}{2401}$	$\frac{1372}{2401}$	$\frac{588}{2401}$	$\frac{252}{2401}$	$\frac{108}{2401}$	1
$x_i p(x=x_i)$	0	$\frac{1372}{2401}$	$\frac{1176}{2401}$	$\frac{756}{2401}$	$\frac{432}{2401}$	$\frac{3736}{2401}$

$$b) E(X) = \sum x_i p(x=x_i) = \frac{3736}{2401}$$

Exercice 15: 2002 Principal

1 B
1 R
3 N

1) on tire 1 boule

P_1 : il reste exactement 2 couleurs

$\Rightarrow P_1$: obtenir soit B ou N

$$\Rightarrow P_1 = \frac{2}{5}$$

2) on tire successivement 2 L

P_2 : il reste exactement 2 couleurs.

$\Rightarrow P_2$: obtenir 1 N et 1 $\bar{N}$ (Bon R)

$$\Rightarrow P_2 = 2! \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \right) = \frac{3}{5}$$

3) on tire simultanément 2 boules

X : le Nbre de couleurs qui restent dans l'urne

$$a) X(\omega) = \{1, 2, 3\}$$

$x=1$: obtenir 1 B et 1 R

$$\Rightarrow p(x=1) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

$$X=2: \text{obtenir } 1N \text{ et } 1\bar{N} \\ \Rightarrow P(X=2) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$$

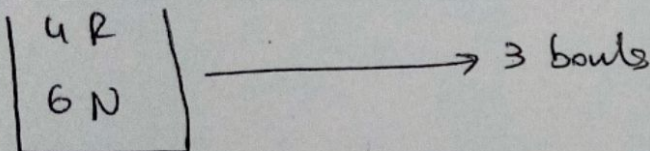
$$X=3: \text{obtenir } 2N \\ \Rightarrow P(X=3) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

d'où la loi de probabilité de X est :

$x = x_i$	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1
$x_i \cdot P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{22}{10}$

$$b) E(X) = \sum x_i \cdot P(X=x_i) = \frac{22}{10} \\ \Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{11}{5}}$$

Exercice 16: 2001 Contrôle



1) Tirage successif sans remise:

$$F: \text{obtenir des 3 boules } NRR \\ \Rightarrow P(F) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{10}$$

2) Tirage successif avec remise:

$$P(F) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{12}{125}$$

3) Tirage simultané:

a) A: obtenir 1N et 2R
soit Ω : l'ensemble des tirages simultanés possibles de 3 boules 10

$$\Rightarrow \text{card } \Omega = C_{10}^3 = 120$$

$$\text{card } A = C_6^1 \times C_4^2 = 36$$

$$\text{alors } P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

b) on répète l'épreuve 5 fois
 X : le Nb de fois où A est réalisé
donc X est une loi binomiale car:

1) (E) est répétée 5 fois de suite d'une manière indépendante

car: 2) chaque épreuve donne 2 issues:
• Succès: "A" est réalisé
• Échec: "A" n'est pas réalisé

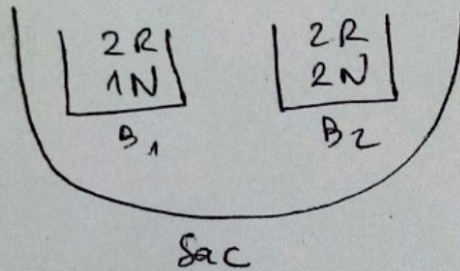
3) $P(A)$: reste constante

$\Rightarrow X$: obéit à la loi binomiale de paramètres: $n=5$ et $p=P(A)=\frac{3}{10}$

$$\text{alors } X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ \forall k \in X(\Omega); P(X=k) = C_5^k \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{5-k}$$

$$c) P(1 < X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3) \\ = C_5^2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^3 + C_5^3 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^2 \\ = 10 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^2 \left[\frac{7}{10} + \frac{3}{10}\right] = \frac{441}{1000}$$

Exercice 17: 2000 Principale



E: l'épreuve: on tire une boîte puis on tire de cette boîte simultanément 2 boules

A: obtenir 2 boules de même couleur

E: les 2 boules tirées sont de B_1

1) A: choisir B_1 et tirer 2R de U_1

a) choisir B_2 et tirer 2R ou 2N de U_2

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_3^2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2 + C_2^2}{C_4^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b) P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)}$$

a) $E \cap A$: obtenir B_1 et tirer 2R de U_1

$$\Rightarrow P(E \cap A) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{alors } P(E|A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

2) on répète l'épreuve n fois
 X : le Nbre de fois où "A" s'est réalisée

a) X : obéit à la loi binomiale de paramètres n et $p = P(A) = \frac{1}{3}$
 $\Rightarrow X(\omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
 $\forall k \in X(\omega), P(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$

b) $E(X) = np = \frac{n}{3}$

$V(X) = np(1-p) = \frac{2n}{9}$

c) $\bar{P}_n$: "A" n'est réalisée aucune fois
 $\Rightarrow \bar{P}_n = [P(\bar{A})]^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

donc $P_n = 1 - \bar{P}_n \Leftrightarrow P_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\frac{2}{3} \in]-1, 1[\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1$

Exercice 18: 1998 Contrôle

1) a) on lance un dé truqué / $P(6) = \frac{1}{3}$
 $\text{et } P(1) = P(2) = \dots = P(5) = x$
 or $\sum_{i=1}^6 P(i) = 1 \Rightarrow 5x + \frac{1}{3} = 1$

$\Rightarrow 5x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{15}$

donc: $P(1) = P(2) = \dots = P(5) = \frac{2}{15}$

b) Pièce truquée / $P(\text{Pile}) = \frac{2}{5}$
 or $P(\text{Pile}) + P(\text{Face}) = 1 \Leftrightarrow$

$P(\text{Face}) = 1 - P(\text{Pile}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

2) on lance simult la pièce et le dé

• si "Pile" et "Impaire" $\Rightarrow X=0$

• si "Pile" et "Paire" $\Rightarrow X=1$

• si "Face" $\Rightarrow X = N \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$X(\omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

• pm $x=0 \rightarrow$ obten "Pile" et "1, 3 ou 5"

$\Rightarrow P(X=0) = \frac{2}{5} \left[\frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} \right] = \frac{4}{25}$

• pm $x=1 \rightarrow$ obten "Pile" et "2, 4 ou 6"
 ou obten "Face" et "1"

$\Rightarrow P(X=1) = \frac{2}{5} \left[\frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{3} \right] + \frac{3}{5} \left[\frac{2}{15} \right] = \frac{8}{25}$

• pm $x=2, 3, 4$ ou 5: obten "F" et "2, 3, 4 ou 5"

$\Rightarrow P(X=2) = P(X=3) = P(X=4) = P(X=5) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{15} = \frac{2}{25}$

• pm $x=6 \rightarrow$ obten "F" et "6"

$\Rightarrow P(X=6) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

d'où la loi de proba de X est:

X_i	0	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(X_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{5}$	1

3) on répète l'épreuve 3 fois de suite
 Y : le Nbre de fois où $(X \geq 5)$

a) Y : obéit à la loi binomiale de paramètre $n=3$ et $p = P(X \geq 5) = \frac{7}{25}$

$P(Y=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{7}{25}\right)^2 \left(\frac{18}{25}\right) = 3 \left(\frac{7}{25}\right)^2 \left(\frac{18}{25}\right)$

b) $E(Y) = np = 3 \left(\frac{7}{25}\right) = \frac{21}{25}$

$V(Y) = np(1-p) = 3 \left(\frac{7}{25}\right) \left(\frac{18}{25}\right) = \frac{378}{625}$

Exercice 19: 1997 Contrôle

Pièce truquée / $P(\text{Face}) = \frac{2}{5}$

1) on lance la pièce 2 fois

a) G: avoir 2 fois "Pile"

$\Rightarrow P(G) = [P(F)]^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

b) H: "avoir 2 fois Face"

$\Rightarrow P(H) = [P(F)]^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

c) I: avoir exactement 1 fois "Pile"

$\Rightarrow I = \overline{G \cup H} \Rightarrow$

$P(I) = 1 - [P(G) + P(H)] = \frac{12}{25}$

2) $\begin{bmatrix} 4B \\ 2N \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3B \\ 3N \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2B \\ 4N \end{bmatrix}$
 $U_1 \quad U_2 \quad U_3$

on lance la pièce 2 fois:

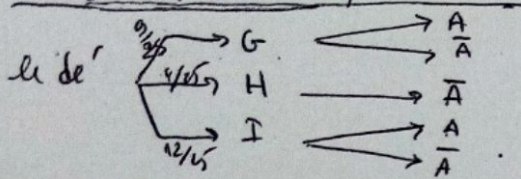
• si 2 "Pile" $\Rightarrow$ on tire simult 3b de U_1

• si 1P et 1F $\Rightarrow$ " " " de U_2

si 2 fois $\Rightarrow$ " " " de U_3

a) A: obtenir 3 B

L'arbre de choix de $\in \mathcal{P}$:



$$A = (G \cap A) \cup (I \cap A)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{9}{25} \times \frac{C_4^3}{C_6^3} + \frac{12}{25} \times \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{12}{125}$$

b) on rejette l'épreuve 5 fois
 X : Nbre de fois où "A" se réalise
 $\Rightarrow X$: obéit à la loi binomiale de paramètres: $n=5$ et $p=P(A)=\frac{12}{125}$

$$\Rightarrow P(X=2) = C_5^2 \left(\frac{12}{125}\right)^2 \left(\frac{113}{125}\right)^3$$

$$E(X) = np = 5 \left(\frac{12}{125}\right) = \frac{12}{25}$$

Exercice 20: 1996 Principale

Urne : $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ N_1 & N_2 \end{bmatrix}$

on tire successivement 2 boules avec remise de la boule B.

1) X : le Nbre de boules B obtenues

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

• pm $X=0 \rightarrow$ obtenir NN

$$\Rightarrow P(X=0) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12}$$

• pm $X=1 \rightarrow$ obtenir NB ou BN

$$\Rightarrow P(X=1) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{7}{12}$$

• pm $X=2 \rightarrow$ obtenir BB

$$\Rightarrow P(X=2) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{12}$$

d'où la loi de proba de X est:

$x=x_i$	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{12}$	1
$x_i: P(x_i)$	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{13}{12}$

$$E(X) = \sum x_i P(X=x_i) = \frac{13}{12}$$

2) Y : le produit des nombres inscrits sur les 2 boules Tirées

$$Y(\Omega) = \{1, 2, 4\}$$

• pm $Y=1 \rightarrow$ obtenir $N_1 B_1$ ou $B_1 N_1$ ou $B_1 B_1$

$$\Rightarrow P(Y=1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{24}$$

• pm $Y=2 \rightarrow$ obtenir $\begin{cases} B_1 B_2 \text{ ou } B_2 B_1 \text{ ou } B_1 N_2 \text{ ou } B_2 N_1 \\ N_1 N_2 \text{ ou } N_2 N_1 \text{ ou } N_1 B_2 \text{ ou } N_2 B_1 \end{cases}$

$$\Rightarrow P(Y=2) = 4 \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + 4 \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{24}$$

• pm $Y=4 \rightarrow$ obtenir $\begin{cases} B_2 N_2 \text{ ou } B_2 B_2 \\ N_2 B_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow P(Y=4) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{24}$$

d'où la loi de proba de Y

$y=y_i$	1	2	4	Σ
$P(Y=y_i)$	$\frac{5}{24}$	$\frac{14}{24}$	$\frac{5}{24}$	1
$y_i: P(y_i)$	$\frac{5}{24}$	$\frac{28}{24}$	$\frac{20}{24}$	$\frac{53}{24}$

$$E(Y) = \sum y_i P(Y=y_i) = \frac{53}{24}$$

Exercice 21: 1995 Principale

2 ds $\begin{cases} 1 \text{ Parfait} \\ 1 \text{ "Truqué"} / P(4) = \frac{1}{3} \end{cases}$

1) a) on lance le ds parfait 3 fois
 X : le Nbre de fois où "4" apparaît

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{loi binomiale de paramètre } \left(3, \frac{1}{6}\right)$$

$$\forall k \in X(\Omega); P(X=k) = C_3^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$$

b) on lance le ds "truqué" 3 fois

F : obtenir exactement 2 fois le "4"

$\Rightarrow F$: obtenir 2 fois "4" et 1 fois "4"

$$\Rightarrow P(F) = \frac{3!}{2!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

- 2) on choisit un dé et on le lance 3 fois
 A: obtenir exact 2 fois le $n \leq 4$
 B: choisir le dé truqué et obtenir exact 2 fois le $n \leq 4$
 C: choisir le dé parfait et obtenir exact 2 fois le $n \leq 4$

$$a) P(B) = \frac{1}{2} \times P(F) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \times P(X=2) = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{144}$$

$$b) A = B \cup C \Rightarrow P(A) = P(B) + P(C)$$

car B et C: incompatibles

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{9} + \frac{5}{144} = \frac{21}{144} = \frac{7}{46}$$

Exercice 22: 1994 Principal

1) $\begin{bmatrix} 5B \\ 2R \\ 3V \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{mult}} 3 \text{ boules}$

A: obtenir 3 boules de même couleur

$\Rightarrow A$: obtenir 3B ou 3V

$$\Rightarrow P(A) = \frac{C_3^5 + C_3^3}{C_3^{10}} = \frac{11}{120}$$

B: obtenir au moins 1R

$\bar{B}$: n'obtenir aucun R $\Rightarrow$ obtenir 3R

$$\Rightarrow P(\bar{B}) = \frac{C_3^3}{C_3^{10}} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\bar{B}) \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{8}{15}}$$

2) on tire successivement 2 boules avec remise de la boule B

X: le nombre de boules Rouges obtenues

$$X(\omega) = \{0, 1, 2\}$$

• pm $x=0 \rightarrow$ obtenir B.R ou V.R

$$\Rightarrow P(X=0) = \frac{5}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{19}{30} = \frac{57}{90}$$

• pm $x=1 \rightarrow$ obtenir B.R ou V.R ou R.R

$$\Rightarrow P(X=1) = \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{31}{90}$$

• pm $x=2 \rightarrow$ obtenir R.R

$$\Rightarrow P(X=2) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$$

donc la loi de proba de X est:

$x=x_i$	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{57}{90}$	$\frac{31}{90}$	$\frac{2}{90}$	1
$x_i P(X=x_i)$	0	$\frac{31}{90}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{35}{90}$
$E(X) = \sum x_i P(X=x_i) = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}$				

Exercice 23: 1993 Contrôle

$$\begin{bmatrix} nN \\ (12-n)B \end{bmatrix}$$

12 boules
SR: 2 boules

1) pm $n=5 \rightarrow$ succès

$$a) A: \text{obtenir } NB \Rightarrow P(A) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{35}{132}$$

$$B: \text{obtenir } BB \Rightarrow P(B) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$$

b) on répète l'épreuve 6 fois

X: le Nbre de fois où "A" est réalisé
 don X obéit à la loi binomiale de paramètres: $n=6$ et $p = P(A) = \frac{35}{132}$

$$\text{alors } X(\omega) = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$$

$$\forall k \in X(\omega), P(X=k) = C_6^k \left(\frac{35}{132}\right)^k \left(\frac{97}{132}\right)^{6-k}$$

$$E(X) = n \cdot p = 6 \left(\frac{35}{132}\right) \Rightarrow E(X) = \frac{35}{22}$$

$$2) a) n \geq 2 \Rightarrow P_n(A) = \frac{n}{12} \times \frac{12-n}{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(A) = \frac{12n-n^2}{132}}$$

$$b) P_n: \text{maximale} \Leftrightarrow (12n-n^2): \text{maximale} \\ \Leftrightarrow 36-(n-6)^2: \text{maximale} \Rightarrow \boxed{n=6}$$

Exercice 24: 1992 Contrôle

$\begin{bmatrix} 3B \\ 2R \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4B \\ 3R \end{bmatrix}$
U_1	U_2

Pièce truquée / $P(F) = 2 P(Pile)$

$$1) \text{ car } P(P) + P(F) = 1 \Leftrightarrow$$

$$3 P(P) = 1 \Leftrightarrow \boxed{P(P) = \frac{1}{3}} \text{ et } \boxed{P(F) = \frac{2}{3}}$$

2) on lance la pièce

• si F $\rightarrow$ on tire simultanément 2 boules de U_1

• si P $\rightarrow$ " " " 3 boules de U_2

• A : obtenir 1 seule B $\begin{cases} \text{de } U_1 \\ \text{ou} \\ \text{de } U_2 \end{cases}$

• A|F : obtenir 1B 1R de U_1
 $\Rightarrow P(A|F) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_3^2} = \frac{1}{10} = \frac{3}{35}$

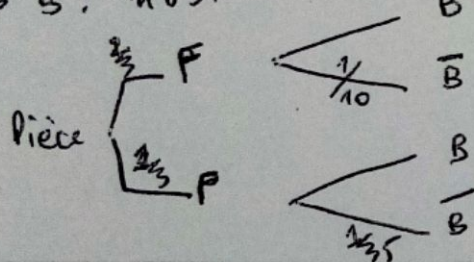
• A|P : obtenir 1B 2R de U_2
 $\Rightarrow P(A|P) = \frac{C_4^1 \times C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$

• $A = (A \cap P) \cup (A \cap F)$
 $\Rightarrow P(A) = P(A \cap P) + P(A \cap F)$
 $= P(P) \cdot P(A|P) + P(F) \cdot P(A|F)$

$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{12}{35} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{35} = \frac{18}{35}$

• B : obtenir au moins 1B

• $\bar{B}$: n'obtenir aucune B



$P(\bar{B}|F) = \frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1}{10}$

$P(\bar{B}|P) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$

$\bar{B} = (\bar{B} \cap F) \cup (\bar{B} \cap P)$

$\Rightarrow P(\bar{B}) = P(\bar{B}|F) \cdot P(F) + P(\bar{B}|P) \cdot P(P)$
 $= \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{35} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{105}$

alors $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{97}{105}$

• C : obtenir 3B de U_1 ou 3B de U_2

$\Rightarrow P(C) = P(F) \frac{C_3^3}{C_3^3} + P(P) \cdot \frac{C_4^3}{C_7^3}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{35} = \frac{11}{105}$

3) on répète l'épreuve "4" fois de suite

X : le Nb de fois où "C" est réalisé

X obéit à la loi binomiale car :

- 1) Répétition indépendante
- 2) Chaque épreuve donne 2 issues $\begin{cases} \text{Succès : } C \\ \text{Échec : } \bar{C} \end{cases}$
- 3) P(C) reste constante

a) X : obéit à la loi binomiale de paramètres : $\begin{cases} n=4 \\ p=\frac{11}{105} \end{cases}$

$\Rightarrow P(X=1) = C_4^1 \left(\frac{11}{105}\right)^1 \cdot \left(\frac{94}{105}\right)^3$

b) $E(X) = n \cdot p = 4 \times \frac{11}{105} = \frac{44}{105}$

Exercice 25: 1991 Principale

4j B : 1, 2, 2, 2

3j N : 1, 1, 2

Sac

1) on tire successivement une remise 3j
 A : "obtenir 3j B"

$\Rightarrow P(A) = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343}$

B : obtenir 2j $n=1$ et 1j $n=2$

$\Rightarrow P(B) = \frac{3!}{2!} \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \frac{4}{7} = \frac{108}{343}$

2) on tire successivement 3 jetons
 une remise du jeton $n=2$

C : obtenir 3j B $\Leftrightarrow$

C : obtenir $B_2 B_2 B_2$ ou $B_2 B_2 B_1$ ou $B_2 B_1 B_2$ ou $B_1 B_2 B_2$

$\Rightarrow P(C) = \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{3}{7}\right) \left(\frac{1}{7}\right) \left(\frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{7}\right) \left(\frac{3}{7}\right) \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{235}{1372}$

D : obtenir 2j $n=1$

$\Leftrightarrow$ D : obtenir 112 ou 121 ou 211

$\Rightarrow P(D) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{7}$

$\Rightarrow P(D) = \frac{214}{735}$

Exercice 26: 1991 Contrôle

4 B : $n \in 1 \rightarrow 4$ } $\xrightarrow{\text{simult}}$ 2 boules
 4 R : $n \in 1 \rightarrow 4$ }

1) A : "obtenir 2 boules portant même numéro"
 $\Rightarrow P(A) = \frac{C_2^2 + C_2^2 + C_2^2 + C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{7}$

B : "obtenir 2 boules portant $n \in$ pair"
 $\Rightarrow P(B) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{3}{14}$

C : "obtenir 2 boules portant $n \in 2$ "
 $\Rightarrow P(C) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}$

2) on rejette l'épreuve n fois de suite
 1) P : les n tirages donnent 2 boules m. couleur
 on pose S : obtenir 2 boules m. couleurs

$$\Rightarrow P(C) = \frac{C_4^2 + C_4^2}{C_8^2} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow P = (P(S))^n = \left(\frac{3}{7}\right)^n$$

b) q : obtenir au moins 1 fois S
 $\bar{q}$: n'obtenir aucune S $\Rightarrow \bar{q} = P$

$$\text{alors } q = 1 - P = 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n$$

$$c) q > 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n > 0,99$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^n < 10^{-2} \Leftrightarrow n \log\left(\frac{3}{7}\right) < -2$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-2}{\log\left(\frac{3}{7}\right)} \approx 5,43$$

$$\text{or } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \boxed{n = 6}$$

Exercice 27: 1990 Contrôle

définir tel que $P(P) = 2P(Imp)$

1) a) P : la proba d'obtenir impair
 soit S : l'union d'1 lancer
 $\Rightarrow S$: obtenir "Pair" ou "Impair"

$$\Rightarrow P(S) = P(P) + P(I) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2P(I) + P(I) = 1 \Leftrightarrow$$

$$3P(I) = 1 \Leftrightarrow P(Imp) = \frac{1}{3}$$

$$\text{alors } \boxed{P = \frac{1}{3}}$$

b) on pose A : obtenir la face "1"

on a Imp = 1 ou 3 ou 5

$$\Rightarrow P(Imp) = P(1) + P(3) + P(5)$$

$$\text{Or } P(1) = P(3) = P(5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = 3P(1) \Rightarrow \boxed{P(1) = \frac{1}{9}}$$

• Pair = 2 ou 4 ou 6

$$\Rightarrow P(P) = P(2) + P(4) + P(6) = 3P(2)$$

$$\text{car } P(2) = P(4) = P(6)$$

$$\text{or } P(P) = 1 - P(I) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = 3P(2) \Rightarrow \boxed{P(2) = \frac{2}{9}}$$

2) on lance ce dé 3 fois

on considère la variable aléatoire

X = le Nbre de fois où l'on obtient "2"

$\Rightarrow X$: obéit à la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=P(2)=\frac{2}{9}$

Car { 1) Répétition indépendante
 2) chaque lancer donne : $\begin{cases} \text{Succès "2"} \\ \text{Echec "2"} \end{cases}$
 3) $P(2)$: reste constante

alors $X(n) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X=k) = C_3^k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{7}{9}\right)^{3-k}$$

A : obtenir exactement 2 fois le "2"

$$\Rightarrow P(A) = P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{7}{9}\right)$$

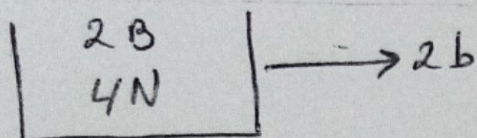
$$\Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{84}{729}}$$

B : obtenir au moins 2 fois le "2"

$$\Rightarrow P(B) = P(X=2) + P(X=3)$$

$$= P(A) + \left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{84}{729} + \frac{8}{729}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{92}{729}}$$

Exercice 28: 1986 Contrôle

1) on tire simultanément 2 boules

P_1 : obtenir 2 boules blanches

$$\Rightarrow P_1 = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

2) on tire successivement avec remise 2 boules.

P_2 : obtenir une seule B $\Rightarrow$

P_2 : obtenir BN ou NB

$$\Rightarrow P_2 = \left(\frac{2}{6} \times \frac{4}{6}\right) \times 2 = \frac{4}{9}$$

3) on tire successivement et avec remise n boules.

$X=0$ si l'on tire aucune Blanche

$X=k$ si la k ème boule Blanche est apparue au k ème tirage

a) $X=0$: obtenir $\underbrace{NN \dots N}_{n \text{ fois}}$

$$\Rightarrow P(X=0) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n = P_0$$

b) $X=k$: obtenir $\underbrace{NN \dots NB}_{(k-1) \text{ fois}}$

$$\Rightarrow P(X=k) = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$c) P_n = \sum_{k=1}^n P_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right]$$

$$\Rightarrow P_n = \left(\frac{1}{3}\right) \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)} \right] \Rightarrow$$

$$P_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{2}{3} \in]-1, 1[\Rightarrow \ln \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\text{alors } \boxed{\lim P_n = 1}$$